Sous-dérangements # (Mai 2021)

Résumé.

En mathématiques, une combinaison linéaire d'objets est la somme de ces objets, chacun multiplié par un coefficient. Dans cet article, les objets seront les nombres de dérangements (permutations sans points fixes) et les facteurs des entiers positifs, négatifs ou nul(s).En les combinant nous formerons une suite de nombres pourvue de propriétés proches de celles de leurs « parents » les dérangements et certains entiers relatifs qui gardent encore quelques mystères.

1. Notations

#d(n) représente le nombre de sous-dérangements d'un ensemble à n éléments. Nous verrons que #d(10) = 105 210, à comparer au nombre de dérangements d(10) = 1 334 961. Notons que #d(n) est toujours inférieur ou égal à d(n), cela explique le titre « sous-dérangements ».

Comme H. W. Gould [1] nous choisirons la notation D(n) pour désigner les nombres de Rao Uppuluri–Carpenter (RUC) connus également sous le nom de « complementary Bell numbers »

D(0) , D(1) , D(2) , D(3) , D(4) , D(5)… Leur construction se trouve dans le tableau 2.

1 , 1 , 0 , -1 , 1 , 2 , -9 , 9 , 50 , -267 , 413 , 2 180 , -17 731 ...

A partir de cette liste d'entiers relatifs , apparemment chaotique, nous obtiendrons la suite des sous-dérangements.

Vous trouverez dans le livre de L. Comtet [2], les dérangements à k orbites notés d(n,k) avec n⩾2 et k⩾1. La dernière ligne de ce tableau correspond à n=10 et 1 ⩽ k ⩽ 5. Il se construit à partir de la relation de récurrence: d(n+1,k)=n[$d(n,k)+d(n-1,k-1)$], avec comme conditions initiales: d(n,k)=0 pour n⩽$2k-1$ et d(n,1)=(n-1)! Exemple: d(10,4) = 9 [$d(9,4)+d(8,3)$] ce qui donne 44 100 = 9 (2 520+2 380)

n\k	1	2	3	4	5
2	1				
3	2				
4	6	3			
5	24	20			
6	120	130	15		
7	720	924	210		
8	5 040	7 308	2 380	105	
9	40 320	64 224	26 432	2 520	
10	362 880	623 376	303 660	44 100	945

2. Calculs

Pour calculer #d(10) nous utiliserons

D(1) = 1	d(10,1) = 362 880
D(2) = 0	d(10,2) = 623 376
D(3) = -1	d(10,3) = 303 660
D(4) = 1	d(10,4) = 44 100
D(5) = 2	d(10,5) = 945

d(10) = d(10,1) + d(10,2) + d(10,3) + d(10,4) + d(10,5) = 1 334 961

#d(10) = D(1).d(10,1) + D(2).d(10,2) + D(3).d(10,3) + D(4).d(10,4) + D(5).d(10,5) =105 210
#d(10) se calcule en procédant à une combinaison linéaire des dérangements d(10,k) avec k orbites ($1 \leqslant k \leqslant 5$) . Les objets d(n,k) sont affectés des coefficients D(k) avec $1 \leqslant k \leqslant$ int(n/2).

3. Formules

$$\#d(n) = \sum_{k=1}^{\mathrm{int}(n/2)} D(k).d(n,k)$$

On obtient ainsi la suite des sous-dérangements #d(n)

1 , 0 , 1 , 2 , 6 , 24 , 105 , 510 , 2 765 , 16 408 , 105 210 . . .

qui augmente moins vite que la suite des dérangements d(n)

1 , 0 , 1 , 2 , 9 , 44 , 265 , 1 854 , 14 833 , 133 496 , 1 334 961 . . .

Leurs fonctions génératrices (FG) exponentielles vérifient des équations différentielles

dérangements	sous-dérangements	
$f'(x) = x f^2(x) e^x$	$f'(x) = x f(x) e^x$	avec $f(0) = 1$
nombres de Fubini	nombres de Bell	
$f'(x) = f^2(x) e^x$	$f'(x) = f(x) e^x$	

La suite des #d(n) a pour FG $f(x) = e^{1+(x-1)e^x}$

La relation de récurrence permettant de calculer #d(n+1) ressemble à celle de D(n+1)

$$D(n+1) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{(n-k)} \mathbf{C}_n^k \; D(k) \qquad (1)$$

$$\#d(n+1) = \sum_{k=0}^{n} (n-k) \; \mathbf{C}_n^k \; \#d(k) \quad \text{et} \quad \#d(n+1) = n \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{C}_{n-1}^k \; \#d(k) \qquad (2)$$

La dernière relation permet de trouver les #d(n) avec une sorte de triangle d'Al-Karaji

1	0	1	2	6	24	105	510	2 765	. . . ligne 1
	1	1	3	8	30	129			
		2	4	11	38	159			
			6	15	49	197			
				21	64	246			
					85	310			ligne 6
						395			ligne 7

Tableau 1.

Sur la première ligne du tableau 1 figure la suite [3] des sous-dérangements. Les nombres qui la constitue sont le produit des éléments de la diagonale par leur numéro de ligne. Exemples 395 est le résultat de la somme des deux nombres au-dessus de lui 85 et 310 . On multiplie 395 par son numéro de ligne 7 . On obtient 2 765 que l'on place à coté de 510 qui provenait du produit de 85 par son numéro de ligne 6 sachant que 85 est le résultat de 21+64.

Si p est premier alors #d(p) $\equiv -1\ [p]$, pour la démonstration n'oubliez pas le théorème d'Ibn Al-Haytham (ou Wilson) . Exemple: #d(13)

D(1) = 1	d(13,1) = 479 001 600
D(2) = 0	d(13,2) = 967 524 480
D(3) = - 1	d(13,3) = 647 536 032
D(4) = 1	d(13,4) = 177 331 440
D(5) = 2	d(13,5) = 18 858 840
D(6) = - 9	d(13,6) = 540 540

#d(13) = D(1).d(13,1) + D(2).d(13,2) + D(3).d(13,3) + D(4).d(13,4) + D(5).d(13,5) + D(6).d(13,6)
#d(13) = 41 649 828 ; #d(13) $\equiv -1\ [13]$

La formule de récurrence (1) engendre le tableau 2 donnant les D(n) sur la première ligne

1	1	0	-1	1	2	-9	9	50	ligne 1
	0	-1	-1	2	1	-11	18		
		-1	0	3	-1	-12	29		
			1	3	-4	-11	41		
				2	-7	-7	52		
					-9	0	59		
						9	59		
							50		

Dans le tableau 1, pour calculer un nombre, on additionnait les deux du dessus . Dans celui-ci on retranchera, exemples: -7-(-7)=0 , 59-9=50. Le 50 que l'on vient d'obtenir sur la diagonale est écrit en haut de la colonne d'à coté à droite. Sous ce 50 on aura 41 car 50-9=41 , sous le 41 on écrira 23 puique 41-18=23 …

Remarque: la suite RUC a pour FG $f(x) = e^{1-e^{-x}}$ avec $f'(x) = f(x)\, e^{-x}$

4. Conclusion

À l'issue de cette construction mathématique, il me semble naturel de se poser au moins deux questions. À partir de coefficients autres que 1 , 1 , 0, -1 , 1 , 2 , -9 , 9 , 50 , -267 , 413 … les CL donneront-elles des résultats intéressants? La suite des sous-dérangements 1 , 0 , 1 , 2 , 6 , 24 , 105 , 510 , 2 765 , 16 408 … peut-elle servir à élucider la conjecture de Wilf,

D(n) = 0 pour seulement n = 2?

Références

[1] H.W.Gould and J.Quaintance,Bell numbers and variant sequences derived from a general functional differential equation, Integers9, 2009, p.1-2.

[2] L. Comtet, «Advanced Combinatorics,» D. Reidel Publ. Co., Boston, Dordrecht ,1974,p. 256.


1+1/2 RIALS
PORTRAIT D'AVICENNE
21 IV.54
5+2½ RIALS
L'ANCIEN TOMBEAU D'AVICENNE
2½+1¼ RIALS
10+5 RIALS
LE NOUVEAU TOM

«Vade retro, Satanas! »

Résumé.

Dans le chapitre précédent, les sous-dérangements provenaient de combinaisons linéaires de dérangements à k orbites affectés des coefficients: 1 , 0, -1 , 1 , 2 , -9 , 9 , 50 , -267 , 413....Dans les prochaines pages, nous travaillerons à partir des sous-dérangements et nous construirons une suite alternée d'entiers positifs, négatifs ou nuls. La suite obtenue sera qualifiée d'erratique et «Vade retro, Satanas! » servira de sous-titre.

1. Notations

€d(n) représentera le nombre de sous-dérangements erratiques d'un ensemble à n éléments.

2. Formules

Rappelons les formules (1) et (2)

$$D(n+1) \; = \; \sum_{k=0}^{n} (-1)^{(n-k)} \; \mathbf{C}_n^k \; D(k) \qquad (1) \qquad \#d(n+1) \; = \; n \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{C}_{n-1}^k \; \#d(k) \qquad (2)$$

Par définition, nous posons:

$$€d(n+1) \; = \; n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{(n-k)} \; \mathbf{C}_{n-1}^k \; €d(k) \qquad (3)$$

avec la condition initiale : $€d(0) = 1$

3. Tableau

La formule de récurrence (3) engendre le tableau 3 donnant les €d(n) sur la première ligne

1	0	-1	2	0	-16	65	-78	-749	6 232	ligne 1
	-1	-1	3	-2	-16	81	-143			
		0	4	-5	-14	97	-224			
			4	-9	-9	111	-321			
				-13	0	120	-432			
					13	120	-552			
						107	-672			ligne 7
							-779			ligne 8

Sur la première ligne du tableau 3 figure la suite «Vade retro, Satanas!». Les nombres qui la constitue sont le produit des éléments de la diagonale par leur numéro de ligne et par -1.Dans le tableau 1, pour calculer un nombre, on additionnait les deux du dessus . Dans celui-ci on retranchera, exemples: 111-(-9)=120 ; -672-107=-779. On multiplie -779, situé sur la diagonale, par son numéro de ligne 8 et par -1. On obtient 6 232 que l'on place à coté de -749 qui provenait du produit de 107 par son numéro de ligne 7 et par -1, sachant que 107 est le résultat de 120-13 et se trouve sur la diagonale.

4. Fonction génératrice exponentielle (FG) et équations différentielles

La suite des €d(n) a pour FG $\qquad f(x) = e^{-1+(x+1)e^{-x}}$

Equations différentielles vérifiées par certaines fonctions génératrices (FG) exponentielles

Nombres de Bell	Complementary Bell numbers
$f'(x) = f(x)\, e^{x}$	$f'(x) = f(x)\, e^{-x}$
sous-dérangements	**sous-dérangements erratiques**
$f'(x) = x\, f(x)\, e^{x}$	$f'(x) = -x\, f(x)\, e^{-x}$

avec $f(0) = 1$

5. Relations de récurrences

Nombres de Bell

$$B(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{C}_n^k \; B(k)$$

Complementary Bell numbers

$$D(n+1) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{(n-k)} \mathbf{C}_n^k \; D(k)$$

sous-dérangements

$$\#d(n+1) = \sum_{k=0}^{n} (n-k) \; \mathbf{C}_n^k \; \#d(k)$$

sous-dérangements erratiques

$$€d(n+1) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{(n-k)} \; (n-k) \; \mathbf{C}_n^k \; €d(k) \qquad (4)$$

Remarque: On passe de la relation (3) à la (4) en utilisant l'égalité: $n\, \mathbf{C}_{n-1}^k = (n-k)\; \mathbf{C}_n^k$

6. Congruence

Si p est premier alors $€d(p)/(p-1) \equiv \mathbf{1}\ [p]$

7. Formule

$$€d(n) = \sum_{k=1}^{\mathrm{int}(n/2)} \mathrm{Bell}(k).(-1)^{(n-k)}.d(n,k)$$

Exemples : €d(7) = 1 . 1 . 720 + 2 . (-1) . 924 + 5 . 1 . 210 = -78

€d(8) = 1 . (-1) . 5040 + 2 . 1 . 7308 + 5 . (-1) . 2380 + 15 . 1 . 105 = -749

8. Conclusion

La suite «Vade retro Satanas» semble présenter des valeurs positives, négatives et deux nulles 1 , 0, - 1 , 2 , 0 , - 16 , 65 , - 78 , - 749 , 6 232 , - 22 068 , - 28 920 , 1 004 685 , - 7 408 740 , 22 263 215 … Avec cette maudite suite, répertoriée dans l'OEIS [3], nous voyons apparaître un énoncé semblable à la conjecture de Wilf « €d(m) = 0 pour seulement m = 1 et m = 4 ».

Référence

[3] Mélika Tebni https://oeis.org/A345652

Sous-dérangements (Mai 2021) par C. L. Martin , enseignant en Iran(1974) - Tunisie - France,
adresse E-mail : retoz@free.fr